880. 類体論ノ算術的証明
(Chevalley ノ方法)

河田　敬義（東　大）

山本　逞（東大學生）

類体論ノ算術的証明ハ Chevalley ガ C. R. ニ 1935年ニ発表シタガ、詳シイ証明ハ略サレテアッタ。今回 " La théorie du corps de classes " (Annals of Math. 41 (1940)) (以後 Ann. トシテ引用) ニ於テイデヤルノ代リニ idèle ナル考ヘヲ用ヒテ丁寧ニソノ証明ヲ與ヘタ。丁度後期學生セミナーデ類体論ヲ末綱先生ニ指導シテ戴イテ居マシタノデ. (考ヘトシテハ寧ロ逆行デスガ) ソノ idèle ノ理論ヲ再ビイデヤル論ニシテ考ヘ直シテ見マシタノデ、其レニヨッテ Chevalley ノ方法ヲ御紹介シヤウト思ヒマス。

以下高木先生: 代数的整数論ヲ (講座) トシテ、Chevalley ノ東大紀要ノ論文ヲ (紀要) トシテ引用シマス。

1

記号ノ説明: k ヲ有限次代数体, ソノ類数ヲ h, 各類カラノ代表ヲ $\mathfrak{j}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{j}_h$. K/k ヲ有限アーベル拡大, ソノガロア群ヲ $\mathfrak{G}(K/k)$, K ノ各類ノ代表ヲ $\mathfrak{J}_1, \cdots\cdots \mathfrak{J}_{h'}$ トスル。

M ヲ k ノ Primdivisor ノ有限個ノ集リトスルトキ, k ノイデヤル $\mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_M$ ナルイデヤルヲ次ノ如ク定

義スル。

$$\mathfrak{a}=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p}^{e}\cdot\prod_{\mathfrak{p}'\notin M}\mathfrak{p}'^{e'} \text{ ナラバ } \mathfrak{a}_M=\prod\mathfrak{p}'^{e'}$$

即チ $(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{p})=1$, $\mathfrak{p}\in M$ トナル。

k ノ Idealmodul $\mathfrak{m}$ ニ對シテ mod. $\mathfrak{m}$. ノ乘法群ヲ $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ ト書ク。

$A_\mathfrak{m}$, $S_\mathfrak{m}$ 等ハ例ノ通リ。

今 M ガ次ノ三種ノ素イデヤルハスベテ含ムモノトスル。

1) アル $\mathfrak{f}_i$ $(i=1,\cdots\cdots,h)$ ノ約數トナルモノ。

2) アル $N_{K_k}\mathfrak{F}_i$ $(i=1,\cdots\cdots,h')$ ノ約數トナルモ

3) $\mathfrak{p}_\infty$. サテ

$$\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p}^{e}\ (e>0) \text{ トシテ } \mathfrak{R}_\mathfrak{m} \text{ カラ } A_\mathfrak{m}/S_\mathfrak{m} \text{ ヘノ}$$

homomorph ナ對應 φ ヲ次ノ如クニ定メル。

$k\ni\alpha\neq0$ ノ mod. $\mathfrak{m}$ ノクラスヲ $\bar{\alpha}$ トスルト

$\varphi(\bar{\alpha})=(\alpha)_M S_\mathfrak{m}$ トスル。コノ定義ガ意味ヲ持ツタメニハ、$\alpha\equiv\alpha'(\mathfrak{m})$ ナラバ $(\alpha)_M S_\mathfrak{m}=(\alpha')_M S_\mathfrak{m}$ デアレバヨイ。コレハ $\alpha^{-1}\alpha'\equiv1\,(\mathfrak{m})$ カラ $(\alpha)_M^{-1}\cdot(\alpha')_M=(\alpha^{-1}\alpha')_M=(\alpha^{-1}\alpha')\in S_\mathfrak{m}$ カラワカル。

次ニ φ ハ $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ ヲ $A_\mathfrak{m}/S_\mathfrak{m}$ 全体ニ寫スコトハ, $A_\mathfrak{m}\ni\mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}=(\alpha)\mathfrak{j}_k$ トナルカラ, $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_M=(\alpha)_M\mathfrak{j}_{k\,M}=(\alpha)_M$ カラワカル。

k ノ M-Einheit β トハスベテノ $\mathfrak{p}\notin M$ ニ對シテ

$((\beta), \mathfrak{p}) = 1$ ナルコトヽシ、M－Einheit ノ全体ヲ E^M（又ハ $E^M(k)$）ト書クコトニスル。

E^M ノ元デ代表サレルクラスヲ $\mathfrak{E}_m^M$ ト書ケバ

(4) $\boxed{\mathfrak{R}_m / \mathfrak{E}_m^M \cong A_m / S_m}$

$\varphi(\bar{\beta}) = S_m$ ハ明カデアルガ，逆ニ $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ ナラバ $(\alpha)_M = (\alpha_1)$, $\alpha_1 \in S_m$ 即チ $(\alpha\alpha_1^{-1})_M = 1$ ナル故 $\alpha\alpha_1^{-1} = \beta \in E^M$, 故ニ $\bar{\alpha} = \overline{\alpha_1\beta} = \bar{\beta}$.

故ニ $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ ナラ $\bar{\alpha} \in \mathfrak{E}_m^M$ トナル。

H_m ヲ例ノ如ク $(\alpha_1) N_{K/k} \mathfrak{a}$ $(\alpha_1 \equiv 1 (m))$ ナル群トスレバ

(5) $\boxed{\mathfrak{R}_m / \mathfrak{N}_m \cdot \mathfrak{E}_m^M \cong A_m / H_m}$

コヽニ $\mathfrak{N}_m$ ハ mod. m ノ K/k ノノルム剰余ノ群トスル。

（証）$\alpha \equiv N_{Kk} A \ (m)$ ナラバ

$$(\alpha)_M S_m = (N_{Kk} A)_M S_m = N_{Kk} \cdot (A)_M, \ S_m \in H_m$$

コヽニ $\mathfrak{P} | \mathfrak{p} \in M$ ナル K ノ $\mathfrak{P}$ ノ全体ヲ M' トスル。（以後同ジ意味デ M' ナル記号ヲ使フ）

逆ニ $\mathfrak{a} \in H_m$ ナラバ，$\mathfrak{a} = (\alpha_1) N_{Kk} \mathfrak{A}$ $(\alpha_1 \equiv 1 (m))$

一方 M ノ 2) ノ假定カラ $\mathfrak{A} = (A)_{M'}$ ト書ケルカラ。

$$(\alpha)_M = \mathfrak{a} = (\alpha_1) N_{Kk} \mathfrak{A} = (\alpha_1) \cdot N_{Kk} (A)_{M'}$$
$$= (\alpha_1)_M (N_{Kk} A)_M$$

故ニ (4) カラ $\alpha_1 N_{Kk} A \cdot \alpha^{-1} = \beta \in E^M$, 即チ

$$\overline{\alpha} = \overline{N_{K/k} A \beta^{-1}} \in \mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M.$$

以下ノ証明デ(4)(5)ノ関係ハ基本的デアル。

2

$h_m(K/k) = (A_m : H_m)$トスルト，$\mathfrak{G}(K/k)$ガ

zyklischノ場合ニ

(6) $h_m(K/k) \geqq (K:k) = n$

但シmハ適當ニ大キクエラブ。又逆ニソノ時

(7) $h_m(K/k) / n^s$ （sハアル自然數）

ヲ証明スル。

(6)(7)ノ証明ハ（講座）ノ方法ヲ多少変形シテ次ノ通リ

先ヅMナル素イデヤルノ集リヲ 1) 2) 3)ノ他ニ 8)ノ$\mathfrak{p}$モスベテ含ムモノトスル。

8) K/kデ分岐スルモノ。

$M \ni \mathfrak{p}$ニ對シテ$\mathfrak{p}^c$ヲn巾剰餘ノ臨界巾（以上）ニトル。即チ

$$\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{p}^c) \text{ナラバ} \quad \alpha \equiv \beta^n\ (\mathfrak{p}^r),\ r = 1, 2, \cdots\cdots.$$

$$m = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}^c \text{トオク。}$$

（以後$\mathfrak{p}^c$ハスベテコノ意味ニ用ヒル。c: critical）

(5)カラ

$$(9)\quad (A_m : H_m) = (\mathfrak{K}_m : \mathfrak{N}_m \cdot \mathfrak{E}_m^M) = \frac{(\mathfrak{K}_m : \mathfrak{N}_m)}{(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{N}_m)}$$

(10) シカルニ $(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{N}_m) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$ （講座197頁，Ann. p. 405），且ツ $e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} / n$ ナル故 M ノ $\mathfrak{p}$ ノ数ヲ s トスレバ (9) カラ (7) が成立スル。

次ニ $\alpha \to \bar{\alpha} \bmod. \mathfrak{m}$ ナル homomorph ナ對應ヲ考ヘレバ

$$(11) \quad \left(E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)\right) = \left(\mathfrak{E}_m^M : N_{Kk} \mathfrak{E}^{M'}(K)\right)$$

$$\times \left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

$$= \left(\mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{E}_m^M \cap \mathfrak{N}_m\right)\left(\mathfrak{E}_m^M \cap \mathfrak{N}_m : N_{Kk} \mathfrak{E}^{M'}(K)\right)$$

$$\times \left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

故ニ $(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m : \mathfrak{N}_m) = (\mathfrak{E}_m : \mathfrak{N}_m \cap \mathfrak{E}_m)$ カラ (11) ヲ (9) ニ代入スレバ

$$\left(E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)\right) = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in M} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}{n} \quad \text{(Ann. p. 408)}$$

ト (10) ヲ用ヒテ

$$(12) \quad (A_m : H_m)$$

$$= n \cdot \left(\mathfrak{E}_m^M \cap \mathfrak{N}_m : N_{Kk} \mathfrak{E}^{M'}(K)\right)\left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

トナリ、(6) が成立スル。

3

次ニ問題ノ中心デアル。

$$(13) \quad h_m(K/k) = (A_m : H_m) \leqq (K : k) = n$$

ヲ一般ノアーベル体ノ場合ニ証明スル。

〇第一段　K/k ヲアーベル擴大，$K \supset K' \supset k$ トスルト，m ヲ十分大ニトレバ

(14)　$h_m(K/k) \mid h_m(K/K')\cdot h_m(K'/k)$.

(証)　$A_m(K')/H_m(K/K')$ カラ $N_{K'k}$ ナル homomorph ナ對應 f ニヨリ $A_m(k)/H_m(K/k)$ ニ寫スト

$$\bigl(f(A_m(K')) : f(H_m(K/K'))\bigr) \,\Big|\, \bigl(A_m(K') : H_m(K/K')\bigr),$$

$$左辺 = \bigl(H_m(K'/k) : H_m(K/K')\bigr) = \frac{(A_m(k) : H_m(K/k))}{(A_m(k) : H_m(K'/k))},$$

即チ (14) ガ成立スル。——

之レニヨッテ (13) ハ $(K:k)=p$ ガ素数ノ場合ニノミ証明スレバヨイ。

〇第二段　$(K:k)=p$ トス。$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ トスルト

$$\begin{tikzcd}
k(\zeta) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "d"'] & K(\zeta) \arrow[d, dash] \\
k \arrow[r, dash, "p"'] & K
\end{tikzcd}$$

$(k(\zeta):k)=d \mid p-1$, 故ニ (7) カラ

$(h(k(\zeta):k),\ p)=1$.

又　$h(K/k)=p^u$.

故ニ (14) カラ

$$p^u = h(K/k) \mid h(K(\zeta)/k) \mid h(k(\zeta)/k)\cdot h(K(\zeta)/k(\zeta))$$

即チ　$h(K(\zeta)/k(\zeta))=p$ ガ証明サレヽバ，ソレカラ $u=1$ トナリ，(13) ガ K/k デ成立スル。故ニ (13) ハ $K(\zeta)/k(\zeta)$ デ証明サレヽバヨイ。

即チ初メカラ $k \ni \zeta$ トスレバ，クンメル体 $K=k(\sqrt[p]{\beta_0})$ ノ場合ニ (13) ヲ証明スレバヨイコトニナル。コレハ今ニ見ル如ク從來ノ存在定理ノ証明ヲ変形シテ出來ル。

補助定理 Mヲ$s+1$箇ノ素イデヤルノ集リトシ、

15) スベテノ $\mathfrak{p}_\infty$

16) スベテノ $\mathfrak{p}\,|\,p$ ナル $\mathfrak{p}$

17) スベテノ $\mathfrak{p}\,|\,f_0$ ナル $\mathfrak{p}$

18) アル $\mathfrak{q}_i$ $(i=1,\cdots\cdots,h)$ ヲ割ル $\mathfrak{p}$，及ビアル

$N_{K/k}\,\mathfrak{Q}_i\ (i=1,\cdots\cdots,h')$ ヲ割ル $\mathfrak{p}$

ハスベテMニ含マレルモノトスル。

然ルトキハ $k(\sqrt[p]{\beta_0})/k$ デ分解スルMニ入ラヌ素イデヤル $\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_s$ ガアッテ

19) $\theta\equiv\theta_{\mathfrak{p}}^{\,p}\ \ (\mathfrak{p}^c)$，スベテノ $\mathfrak{p}\in M$

20) $\left((\theta),\mathfrak{p}\right)=1$，$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_i$，$\notin M$

ナラバ $\theta=\theta_0^{\,p}$ トナル。（θ等ハスベテkノ元，$\mathfrak{p}^c$ハp巾剰餘ノ臨界巾）

コノ補助定理ヲ用ヒルト，

$$\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p}^c \quad \text{トスレバ}$$

$$E^M\ni\alpha\equiv\beta^p(\mathfrak{m})\ \text{ナラバ}\ \alpha=\alpha_0^{\,p}$$

即チ $\quad \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}\frown\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}=(\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})^p.$

特ニ $\beta=1$ トスレバ $\quad E^M\frown S_{\mathfrak{m}}=(E^M)^p\frown S_{\mathfrak{m}}$

故ニ (5) カラ

$$h(K/k)=(\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{N}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})$$

$$=\frac{(\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})}{(\mathfrak{N}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}:\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})}$$

$$(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) = \frac{(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p)}{(\mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p)},$$

$$(\mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p) = (\mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{E}_m^M \cap \mathfrak{R}_m^p)$$

$$= (\mathfrak{E}_m^M : (\mathfrak{E}_m^M)^p) = (E^M : (E^M)^p),$$

$$(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p) = p^{2(s+1)} \quad (\text{Ann. p.409, 講座 p.270})$$

$$(E^M : (E^M)^p) = p^{s+1} \quad (\text{Ann. p. 402}),$$

之レ等カラ

$$h(K/k) = \frac{p^{s+1}}{(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}^p \mathfrak{E}_m^M)}$$

トナル。

次ニ補助定理デトッタ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_s\ (\nmid m)$ カラ

$(\pi_i)_M = \mathfrak{p}_i = \pi_i \quad (i = 1, \cdots\cdots, s)$ ヲ選ブ。$\mathfrak{p}_i$ ハ K/k デ分解スルカラ K/k ノ Idealnorm, 即チ $\overline{\pi}_i \in \mathfrak{N}_m$ デアル。

$$\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M \supset \mathfrak{N}_s - \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M \cdot \prod_{i=1}^{s} \overline{\pi}_i^{e_i} \text{ トオクト}$$

$$\overline{\pi} = \prod_{i=1}^{s} \overline{\pi}_i^{e_i} \in \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M$$

ナリトスレバ

$\beta \pi \equiv \gamma^p (m)$, $\beta \in E^M$ ナル $\beta, \gamma \in k$ ガアル。又

$(\beta\pi)_M = \prod \mathfrak{p}_i^{e_i}$ ナル故 $((\beta\pi), \mathfrak{p}) = 1$, $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p} \nmid M)$.

故ニ補助定理カラ

$$\beta\pi = \pi_0^{\,p}$$

即チ $\pi\mathfrak{p}_i^{e_i} = (\pi_0)_M^p$ トナリ p/e_i $(i=1,\cdots\cdots,s)$ トナル。

之レカラ $(\mathfrak{R}_0 : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) = p^s$,

即チ $(\mathfrak{R}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) \geqq p^s$,

故ニ $h(K/k) \leqq p$

ガ証明セラレタ。

5

故ニ補助定理ヲ証明スレバヨイ。

E^M ニ含マレル Ordnung 有限ナル群 E_1 ハ k ノ 1 ノ巾根ヨリナル群デアル。假定カラ $E_1 \ni \zeta_p$.
故ニ E^M ハ s 箇ノ Erzeuge ヲ有スル freie abelsche gruppe ト E_1 トノ積トナル。(Ann. P. 402).

今 $\beta_0 \notin (E^M)^p$ ナル故, $E^M/(E^M)^p$ ハ $s+1$ 箇ノ生成元ヲ持ツ $(p,\cdots\cdots,p)$ 型ノ群デ、ソノ Basisklasse カラ $\beta_0, \beta_1, \cdots\cdots, \beta_s$ ヲトル。(β_0 ヲ含マスコトガ出來ル).

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dash, "p"'] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T_1 \arrow[dr, dash] & T_i \arrow[d, dash] & T_s \arrow[dl, dash] \\
 & K \arrow[d, dash, "p"] & \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

$T = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \sqrt[p]{\beta_1}, \cdots\cdots, \sqrt[p]{\beta_s})$,

$T_i = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \cdots\cdots \underset{i\text{欠}}{\updownarrow} \cdots\cdots \sqrt[p]{\beta_s})$ トスル。

§3 ノ $k \triangleq n$ カラ T/T_i ナル巡回拡大デ分解シナイ T_i ノ素イデヤル $\mathfrak{P}^{(i)}$ ガ無限ニ沢山アルコトガ分ルカラ, $N_{T_i k}\mathfrak{P}^{(i)} = \mathfrak{p}_i$ ガ M ニ入ラヌ様ニ $\mathfrak{P}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,s)$ ヲ取ル。

$\mathfrak{p}_i \notin M$ ナル故 $\mathfrak{p}_i$ ハ T/k デ分岐シナイ。(講座 P. 258)

又T/kノガロア群ハ$(p,\cdots\cdots,p)$型ナル故(講座p.254)，$\mathfrak{p}_i$ノ分解群ハ巡回群デナケレバナラヌカラ，$\mathfrak{p}_i$ハT_i/kデ完全ニ分解スル。故ニ特ニK/kデ分解スル。

従ッテ

(21) $\beta_i = \gamma_{ij}^{\,p} \ (\mathfrak{p}_j^{\,c_j}) \ (i=1,\cdots\cdots,s;\ i\neq j)$

ナルγ_{ij}ガ存在スル。(講座p.258) 但シβ_iハ$\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p}_i^{\,c_i}$デハ$p$巾剰餘トハナラナイ。何トナレバ其ノ場合ニ$\mathfrak{p}_i$ハ$T/k$デ完全ニ分解シテシマフカラ。

サテ$k(\sqrt[p]{\Theta})=Z$ヲ考ヘル。目標ハ$Z=k$デアル。

$(\theta)=\prod_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p}^{e}\prod_{i=1}^{s}\mathfrak{p}_i^{\,f_i}$ト分解スルト，$f_i\equiv 0\,(p)$ナル$\mathfrak{p}_i$ハ$Z/k$デ分岐シナイカラ(講座p.258)，今$f_1,\cdots\cdots,f_r\neq 0$，$f_{r+1},\cdots\cdots,f_s\equiv 0\,(p)$トシテ，$M'$ヲ15)―18)デ定メタ$M$ノ他ニ$\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_r$ヲカロヘタモノトスル。

$$m'=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p}^{c}\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{p}_i^{\,c_i}$$ トオク。

$Z=k$ノ代リニ(5)カラ

(22) $\mathfrak{H}_{m'}=\mathfrak{H}_{m'}\mathfrak{E}_{m'}^{M'}$

ヲ証明スレバヨイ。假定(19)カラ$E\ni\mathfrak{p}$ハZ/kデ分解スル。之レカラ$\mathrm{mod.}\ m'$ノクラス中$\alpha\equiv 1\ (\mathfrak{p}_i^{\,l_i})\ (i=1,\cdots,r)$デ代表サレルクラスハスベテ$\mathfrak{H}_{m'}$ニ入ル。(講座p.201)

次ニ$\beta_1,\cdots\cdots,\beta_s\in E^{M}\subset E^{M'}$ナル故$\overline{\beta}_i\in\mathfrak{E}_{m'}^{M'}$トナル。

一方

$$\delta_{ij} \equiv \beta_i (p_j^{c_j}), \equiv 1 (p_k^{c_k}) \quad (k \neq j,\ k=1, \cdots\cdots, r)$$

$$\equiv 1 (p^c) \quad (p \in M)$$

$$= \delta_{ij} \quad (i, j=1, \cdots\cdots, r)$$ ヲ選ベバ, (21) カラ

$$\begin{cases} \delta_{ij} \equiv \gamma_{ij}^{p} (p_j^{c_j}) \quad (j=1, \cdots\cdots, r\ ;\ j \neq i) \\ \beta_i \equiv \prod_{j=1}^{r} \delta_{ij} \ (m') \end{cases}$$

故ニ $\bar{\delta}_{ij} \in \mathfrak{N}'_m$ カラ $\bar{\delta}_{ii} = \bar{\beta}_i \prod_{j \neq i} \bar{\delta}_{ij}^{-1} \in \mathfrak{N}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$ トナル。

サテ $p_i \ (i=1, \cdots\cdots, r)$ ハ Z/k デ分岐スルカラ $(f_{\mathfrak{p}_i}-1)$. (22) ノ証明ニハ $((\alpha), \mathfrak{p}_i)=1, \alpha \equiv 1 (m' \mathfrak{p}_i^{-c_i})$ ニ對シテ

(23) $\quad \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$

ヲ証明スレバヨイ。講座 P.215 (1)). 然ルニ $((\alpha_i), \mathfrak{p}_i)=1$ ニ対シテ $(\bar{\alpha}_i : \bar{\alpha}_i^{P}) = p(\mathfrak{p}_i \times p)$ (講座 P.212, (7), Ann. P.410), 且ツ $\bar{\delta}_{ii} \neq \bar{\alpha}_i^{P}$ ナル故

$$(\bar{\alpha}^{P})(\bar{\delta}_{ii}) = (\bar{\alpha})$$

トナル。上ニ $\bar{\delta}_{ii} \in \mathfrak{N}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$ ヲ証明シタカラ, 此レカラ (23) ガ成立スルコトガワカル。

6

以上デ巡回拡大デ基本定理 $h(K/k) = (K:k)$ ガ算術的ニ証明ヒラレタ。之レカラ後ハ Chevalley ノ紀要ノ方法

デ進メバヨイガ, Algebra ノ理論ガ自由ニ使フコトガ許サレルナラバ, Hasse ノ方法ノ方ガ自然デアルヤウニ思ハレル。

其ノタメニ先ヅ Normensatz: $\alpha \in k$ ガスベテ $\mathfrak{p}^c$ ニツイテ巡回拡大 K/k ノ Normenrest デアレバ, α ハ K/k ノ Norm トナル。

何トナレバ, 巡回拡大ニ対シテ $h = n$ ガ成立シタカラ, (12) カラ

$$\begin{cases} \mathfrak{C}_m \cap \mathfrak{N}_m = N_{K/k}\, \mathfrak{C}^{M'}(K), & (24) \\ E^M(k) \cap S_m = N_{K/k}\, E^{M'}(K) \cap S_m & (25) \end{cases}$$

ガ成立スル。今 $\mathfrak{p} \mid (\alpha)$ ナル $\mathfrak{p}$ ハスベテ M ニ入レテオケバ,

$$\alpha \in E^M.$$

假定カラ $\overline{\alpha} \in \mathfrak{C}_m^M \cap \mathfrak{N}_m$ ナル故 (24) カラ $\alpha \equiv N_{K/k} A(m)$,

$$A \in E^{M'}(K)$$

故ニ $\alpha N_{K/k} A^{-1} \equiv 1\ (m)$, $\alpha N_{K/k} A^{-1} \in E^M$ トナリ (25) カラ $\alpha N_{K/k} A^{-1} = N_{K/k} B$ トナル。即チ $\alpha = N_{K/k} AB$ トナル。————

故ニ Hasse ノ理論カラ (Math. Ann. 107) 各 Primstelle $\mathfrak{p}$ ニ対シテ Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \quad (\alpha \in k)$$

ガアーベル擴大 K/k ニ對シテ定義サレ

$$(26) \quad \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \rightleftarrows \alpha \equiv N_{K/k} A(\mathfrak{p}^c), \quad A \in K$$

(27) $\mathfrak{p}$ ガ K/k デ分岐シナケレバ, Artin Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ ニヨリ

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-e}, \quad \mathfrak{p}^{e} \,\|\, (\alpha)$$

トイラハサレル。

(28) Produktformel: $\prod\limits_{\text{all } \mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=1$

以上カラ $\bar{\alpha}$ mod. $\mathfrak{m}$ ニ對シテ

$$\chi(\bar{\alpha})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$$

ナル $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ對應ヲ考ヘルト, $\bar{\alpha} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$, 及ビ $\bar{\beta}$ ($\beta \in E^{M}$) ニ對シテハ(26), (27), (28) カラ (K/k デ分岐スル $\mathfrak{p}$ ハ M ニ入レテアルカラ)

$$\chi(\bar{\alpha})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\prod_{\mathfrak{p} \in M} 1=1,$$

$$\chi(\bar{\beta})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\prod_{\text{all } \mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin M}\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{\nu}=1$$

即チ $\chi(\bar{\alpha})$ ハ $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homomorph ナ對應トナル。

一方 §1 デ $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M} \underset{\varphi}{\cong} A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ ナル関係ヲ立テタカラ, $A \ni \mathfrak{a} - \varphi(\bar{\alpha})=(\alpha)_{M}$ ニヨリ

$$\chi_{0}(\mathfrak{a})=\chi(\bar{\alpha})$$

ニヨッテ, $A_{\mathfrak{m}}$ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homomorph ナ對應ヲ考ヘレバ, コレガ $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homo-

morph ナ對應トナル。

今 $A_m \ni \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \notin M} \mathfrak{p}^e$ トスレバ, $\mathfrak{a} = (\alpha)_M$ ニ對シテ

$$\chi_0(\mathfrak{a}) = \chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$= \prod_{\text{all } \mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p} \notin M} \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^e = \left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right),$$

即チ $\chi_0(\mathfrak{a})$ ト一般ノ *Artinsymbol* $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$ トガ一致スル。

χ 又ハ χ_0 ニヨリ $\mathfrak{G}(K/k)$ 全体ニウツサレルコトハ紀要 p. 427 參照。即チ *Isomorphiesatz*. χ_0 ト *Artinsymbol* トノ一致カラ *Primideal* ニツイテ考ヘレバ *Zerlegungssatz*.

ノ最後ニ存在定理ノ証明ハ §4, 5 ノ計算カラ講座ノ証明ハ若干簡易化サレル。

* * * *

Ideal ト *idèle* トノ関係, *Ideal* 群ト *idèle* ノ群トノ関係等ハ C. Chevalley: *generalization de la théorie du corps de classes pour les extensions infinis* (Liouvilles Journal (1936)) デ示サレテアル。以上ハソレニ頼ッテ *idèle* ノ理論ヲ普通ノ *Ideal* ノ話ニ翻譯シタノデアルガ, 逆ニ以上ノ関係カラ *Ideal* ノ理論カラ *idèle* ヘノ移リ変リノ様子ガワカル。

即チ $\mathfrak{f}$ ナル對應デ與ヘラレル(3)ノ式デ M ニ含マレル $\mathfrak{p}$ ヲ次第ニ増シテ行ク。極限トシテスベテノ $\mathfrak{p}$ ヲ含ム様ニスレバ，E^M ハ k ノ元全体トナル。ソシテ $\mathfrak{H}_m$ ハ $m=\prod \mathfrak{p}^c$ ノ c ヲ順次ニ大ニスレバ，$\prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}^*$ ヲ生ジ，groupe de fondamental J_k トナル。従ッテ $\mathfrak{H}_m$ ハ groupe de $\mathfrak{f}$ トシテノ Norm トナル。カクシテ

$$A_{\mathfrak{f}}/H_{\mathfrak{f}} \cong J_k / k \cdot N_{K/k} J_K$$

トナルコトガ推定サレル。

次ギニ $\mathfrak{H}_m / \mathfrak{E}_m^M \cdot \mathfrak{H}_m$ ノ $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ Character χ:

$$\chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}} \right)$$

デ $m \longrightarrow \infty$ トスレバ $J_k \ni \alpha = (\alpha_{\mathfrak{p}_1}, \alpha_{\mathfrak{p}_2}, \cdots\cdots)$ ニ對シテ

$$\chi(\alpha) = \prod_{\mathfrak{p}_i} \left(\frac{\alpha_{\mathfrak{p}_i}, Z}{\mathfrak{p}} \right)$$

ト定義スレバヨイトイフコトガ想像サレル。実際ニ之レ等ノコトハ上ノ Chevalley ノ論文デ証明サレテヰル。